

## PAUTA AUXILIAR 9

P1) a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$

- Dominio: ya que es una fracción debemos preocuparnos de que el denominador no sea 0.

veamos qué casos serían esos:

$$x^2 - 1 = 0 \quad / +1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

"POR LO  
TANTO" →

$$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

- Ceros: Tenemos que buscar los "x" tal que  $f(x) = 0$

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x}{x^2 - 1} = 0 \quad / \cdot (x^2 - 1)$$

$$x = 0 \cdot (x^2 - 1)$$

$$x = 0$$

$$\therefore \text{ceros} = \{0\}$$



- Signos: Tenemos que ver cuándo la Función es Positiva y cuándo es negativa.

Para Hacer esto, Debemos evaluar Diferentes Intervalos Definidos por los Puntos "Importantes" que Hemos encontrado:  $-1$ ,  $0$  y  $1$   
Entonces los Intervalos serían:

$$\begin{array}{cccc}
 (-\infty, -1) & (-1, 0) & (0, 1) & (1, +\infty) \\
 \underbrace{\overbrace{\underbrace{(x+1)}_{(-)} \underbrace{(x-1)}_{(-)}}_{(+)}}_{X \} (-)}_{(-)} & \underbrace{\overbrace{\underbrace{(x+1)}_{(+)} \underbrace{(x-1)}_{(-)}}_{(-)}}_{X \} (-)}_{(+)} & \underbrace{\overbrace{\underbrace{(x+1)}_{(+)} \underbrace{(x-1)}_{(-)}}_{(-)}}_{X \} (+)}_{(-)} & \underbrace{\overbrace{\underbrace{(x+1)}_{(+)} \underbrace{(x-1)}_{(+)}}_{(+)}}_{X \} (+)}_{(+)}
 \end{array}$$

$$\therefore f(x) > 0 \quad \text{si } x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

- Paridad: Veamos que pasa al evaluar  $f(-x)$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = - \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right) = -f(x)$$

• como  $f(-x) = -f(x)$ , la Función es impar



$$b) \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+2} = \frac{x+2}{(x+2)(x+1)}$$

• Dominio: Para que el denominador no sea 0, necesitamos que  $x \neq -2$  y  $x \neq -1$

$$\therefore \text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$$

Ahora que restringimos el dominio, podemos "cancelar" los  $(x+2)$  y resulta:

$$h(x) = \frac{1}{x+1}$$

• Ceros:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{1}{x+1} = 0 \quad / \cdot (x+1)$$

$$1 = 0 \cdot (x+1)$$

$1 = 0 \quad ?$  ESTO NO PUEDE SER, POR LO QUE

LA FUNCIÓN NO TIENE CEROS.

Para que una fracción sea 0,  
su denominador debe ser 0, pero  
en esta función el denominador  
siempre es 1 y por lo  
tanto la función no tiene  
ceros.



• Signos: Los puntos "importantes" que habíamos encontrado eran  $-1$  y  $-2$ .

$$(-\infty, -2)$$

$$(-2, -1)$$

$$(-1, +\infty)$$

$$\frac{1 \{ (+) \}}{x+1 \{ (-) \}} \Bigg\} (-)$$

$$\frac{1 \{ (+) \}}{x+1 \{ (-) \}} \Bigg\} (-)$$

$$\frac{1 \{ (+) \}}{x+1 \{ (+) \}} \Bigg\} (+)$$

$$\therefore h(x) > 0 \text{ si } x \in (-1, +\infty)$$

$$h(x) < 0 \text{ si } x \in (-\infty, -1)$$

• Paridad:

$$f(-x) = \frac{1}{-x+1} \neq f(x) \text{ y } \neq -f(x)$$

$\therefore h(x)$  no es par ni impar.



P2 | a) \* + semi resumen.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x - 8}$$

Lo primero que debemos hacer es factorizar

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$$

pero ojo, no podemos "cancelar" los  $(x-2)$  aún. Primero tenemos que restringir el dominio.

- Dominio: Para definir el dominio, tenemos que ver qué "x" pueden "entrar" a la función.

En general, Hay 2 cosas con las que tenemos que tener cuidado:

- 1) Lo que va dentro de una raíz tiene que ser mayor o igual a 0.
- 2) El denominador de una raíz NUNCA puede ser 0.



En este caso tenemos que tener cuidado con lo 2º.

$$\text{Entonces } (x+4) \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$$

$$(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

\* el denominador no nos importa para esto, puede ser 0 y no pasa nada.

Por lo tanto,  $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}}$

- Ceros: Tenemos que encontrar los "x" tales que  $f(x) = 0$

Para esto, tomamos  $f(x) = 0$  y despejamos x.

veamos este caso:

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$$

como ya restringimos el dominio, podemos cancelar los (x-2)

$$f(x) = \frac{x+5}{x+4} = 0 \quad / \cdot (x+4)$$

$$(x+5) = 0 \cdot (x+4)$$

$$(x+5) = 0 \quad / -5$$



CONCLUIMOS ENTONCES QUE

$$\text{ceros} = \{-5\}$$

- **crecimiento:** Para ver si la Función es creciente o decreciente, Debemos ver qué pasa cuando crece el "x"  
Entonces, si  $x_1 < x_2$

$$\begin{array}{cc} \downarrow f(x_1) < f(x_2)? & \text{o} & \downarrow f(x_2) < f(x_1)? \\ \text{(creciente)} & & \text{(decreciente)} \end{array}$$

Lo que Haremos será Tomar un  $x_1$  y  $x_2$  cualquiera, TAL que  $x_1 < x_2$

Luego veremos qué pasa con  $f(x_2) - f(x_1)$ .

$$\text{si } f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \text{creciente}$$

$$\text{si } f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow \text{decreciente}$$

veamos el caso de esta Función:



Sea  $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$  tal que  $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+5}{x_2+4} - \frac{x_1+5}{x_1+4}$$

$$= \frac{(x_2+5)(x_1+4)}{(x_2+4)(x_1+4)} - \frac{(x_1+5)(x_2+4)}{(x_2+4)(x_1+4)}$$

(sólo igualar  
denominadores  
para poder  
sumar)

$$= \frac{(x_2+5)(x_1+4) - (x_1+5)(x_2+4)}{(x_1+4)(x_2+4)}$$

$$= \frac{x_2 \cdot x_1 + 4x_2 + 5x_1 + 20 - (x_1x_2 + 4x_1 + 5x_2 + 20)}{(x_1+4)(x_2+4)}$$

$$= \frac{\cancel{x_2} \cancel{x_1} + 4x_2 + 5x_1 + \cancel{20} - \cancel{x_1} \cancel{x_2} - 4x_1 - 5x_2 - \cancel{20}}{(x_1+4)(x_2+4)}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1+4)(x_2+4)}$$



Llegamos a que:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 4)(x_2 + 4)}$$

Para ver si esto es mayor o menor que 0, debemos evaluar en intervalos. Para crear los intervalos debemos tener en cuenta que debemos cubrir todo el dominio y hacer separaciones en los puntos "importantes" que hemos encontrado (los que no pertenecen al dominio y los ceros).

En este caso, esos puntos serían: -5, -4 y 2

Entonces los intervalos en los que debemos evaluar son los siguientes:

$(-\infty, -5)$   $(-5, -4)$   $(-4, 2)$  y  $(2, +\infty)$



Para ver si una Fracción es positiva o negativa, tenemos que ver como es el numerador y como es el denominador.

En este caso, sin importar en qué intervalos estén  $x_1$  y  $x_2$ ,  $x_1 - x_2$  será negativo ya que habíamos definido  $x_1 < x_2$ .

Entonces solo nos falta ver el Denominador.

Si  $x \in (-\infty, -5)$   $\underbrace{(x_1+4)}_{(-)} \underbrace{(x_2+4)}_{(-)}$  es positivo  $(- \cdot - = +)$

Si  $x \in (-5, -4)$   $\underbrace{(x_1+4)}_{(-)} \underbrace{(x_2+4)}_{(-)}$  es positivo

Si  $x \in (-4, 2)$   $\underbrace{(x_1+4)}_{(+)} \underbrace{(x_2+4)}_{(+)}$  es positivo  $(+ \cdot + = +)$

Si  $x \in (2, +\infty)$   $\underbrace{(x_1+4)}_{(+)} \underbrace{(x_2+4)}_{(+)}$  es positivo

Entonces, la fracción quedaría:  $\frac{(-)}{(+)}$  Para cualquier caso, por lo que siempre sería negativa (menor que 0).

Llegamos entonces a que  $f(x_2) - f(x_1) < 0$  siempre, y por lo tanto,  $f(x)$  es siempre decreciente.



OJO que este es un caso particular, perfectamente podría pasar que una función fuese creciente en un intervalo y decreciente en otro.

• PARIDAD: Para evaluar la paridad de una función, debemos ver qué pasa al evaluar  $f(-x)$ . Hay 3 opciones:

$$1) f(-x) = f(x) \Rightarrow \text{PAR}$$

$$2) f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{IMPAR}$$

$$3) f(-x) = \text{otra cosa} \Rightarrow \text{NI PAR NI IMPAR}$$

veamos qué pasa con esta función:

$$f(-x) = \frac{(-x)+5}{(-x)+4}$$

ya que esto es distinto a  $f(x)$  y  $-f(x)$ , esta función no es ni PAR ni IMPAR.



- **INJECTIVIDAD:** Recordemos que para que una función sea inyectiva, no pueden haber 2 elementos distintos del dominio que tengan la misma imagen.

La Definición Formal es:

$$(\forall a, b \in \text{Dom}(f)) \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

→ Para demostrar que algo NO es inyectivo, basta con encontrar un ejemplo de 2 elementos distintos que tengan la misma imagen.

→ Para demostrar que algo SI es inyectivo, utilizamos la definición como sigue:

P.D.Q:  $f(x)$  es inyectiva.

Sea  $a, b \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}}_{\text{Dominio}}$  tal que  $f(a) = f(b)$

$$f(a) = f(b)$$

$$\frac{a+5}{a+4} = \frac{b+5}{b+4} \quad / \cdot (a+4)(b+4)$$

$$(a+5)(b+4) = (b+5)(a+4)$$



$$ab + 4a + 5b + 20 = ab + 4b + 5a + 20$$

$$4a + 5b = 4b + 5a \quad \begin{array}{l} / -4a \\ -4b \end{array}$$

$$b = a$$

se concluye que  $f(x)$  es inyectiva.

- SOBreyectividad: Recordemos que una Función es sobreyectiva sólo si la Imagen es igual al codominio

Esta función NO es sobreyectiva ya que, si su codominio son los  $\mathbb{R}$ ,  $1 \in \mathbb{R}$  pero

$f(x)$  nunca será 1 sin importar el  $x$ .

veamos que pasaría si

$$f(x) = 1$$

$$\frac{x+5}{x+4} = 1 \quad / \cdot (x+4)$$

$$x+5 = x+4 \quad / -x$$

$$5 = 4$$

Esto es falso, por lo que 1 no pertenece a la imagen, pero sí al dominio.

Por lo tanto,  $f(x)$  NO es sobreyectiva.



• **Bijectividad:** Una función es Bijectiva si es inyectiva y sobreyectiva ya que  $f(x)$  no es sobreyectiva, tampoco es Bijectiva

• **Imagen:** La imagen es el conjunto de números que "salen" de la función cuando "entra" todo el Dominio.

Muchas veces se puede determinar "al ojo", Pero mostraré una forma fácil de determinarla.

Digamos  $y = \frac{x+5}{x+4}$   $\swarrow$  nuestra función

Despejemos  $x$

$$(x+4) \cdot y = x+5$$

$$xy + 4y = x+5 \quad \begin{array}{l} -4y \\ \hline -x \end{array}$$

$$xy - x = 5 - 4y$$

$$x(y-1) = 5-4y \quad / : (y-1)$$



$$x = \frac{5-4y}{y-1}$$

veamos ahora cuales son los "y" posibles.  
Es evidente que  $y \neq 1$ . con cualquier otro no  
Hay problema.

por lo tanto,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

P3 | a)  $f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y) //$

b)  $f(g(x)) \cdot f(h(x)) = f(g(x)+h(x)) \leftarrow \text{por (a).}$

veamos cuánto es  $g(x)+h(x)$

$$\frac{2}{2-x^2} + \frac{-x^2}{2-x^2} = \frac{2-x^2}{2-x^2} = 1$$

entonces  $f(g(x)+h(x)) = f(1) = 2^1 = 2 //$